
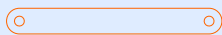


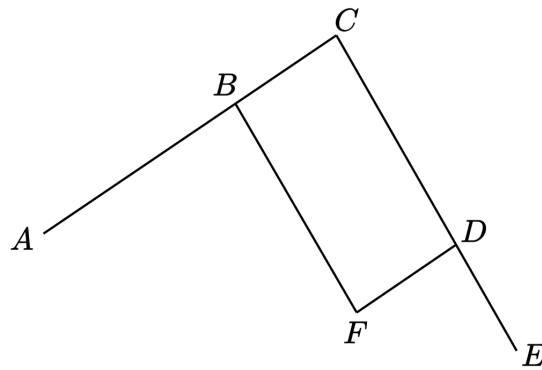
MET 
STANGEN
MEER
 **STEAM**

Pantograaf voor beginners

Domas Syaifoel

mei 2026

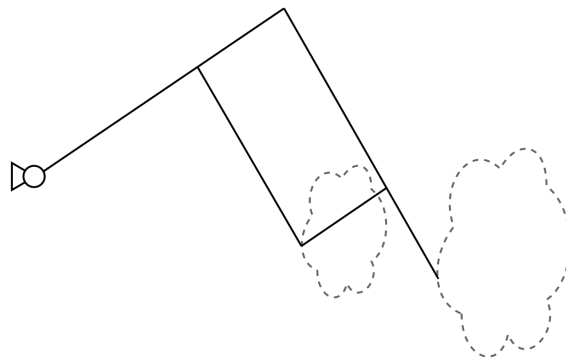




Figuur 1

We hebben de volgende constructie: lijnsegmenten ABC en CDE met verhoudingen $\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{CE}$; en parallellogram $BCDF$. We willen aantonen dat 1) A , F en E op één lijn liggen, en 2) dat $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

Hiermee tonen we namelijk aan dat F een verkleining traceert van het pad dat E traceert, als A vast staat.



Figuur 2

Opgaven

1. Toon aan dat driehoeken ABF en ACE gelijkvormig zijn.
2. Toon aan dat driehoeken ACE en FDE gelijkvormig zijn. (Daarmee zijn dus ook ABF en FDE gelijkvormig. Tip: schrijf eerst $\frac{BC}{AC}$ en $\frac{DE}{CE}$ zo ver mogelijk uit.)
3. Toon hiermee aan A , F en E op één lijn liggen.
4. Toon hiermee aan dat $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

Uitwerkingen

Bewijs.

1. Allereerst geldt $BF = CD$ door de eigenschappen van een parallellogram. Verder weten we $\angle ABF = \angle ACE$ (F-hoeken). Nu weten we $\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{CE} = \frac{BF}{CE}$, dit kunnen we omschrijven

naar $\frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CE}$. Dit is genoeg om te stellen dat ABF en ACE gelijkvormig zijn (een gelijke hoek, en een gelijke verhouding tussen de zijden aanliggend aan die hoek).

Bewijs.

2. Hier weten we $\angle ACE = \angle FDE$ (F-hoeken). Als op dezelfde manier als bij de vorige opgave willen aantonen dat ACE en FDE gelijkvormig zijn, moeten we nu eerst aantonen dat $\frac{FD}{DE} = \frac{AC}{CE}$. Dit kan met wat extra stappen. Laten we eerst kijken wat $\frac{BC}{AC}$ is:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC - AB}{AC} = \frac{AC}{AC} - \frac{AB}{AC} = 1 - \frac{AB}{AC}$$

Ietselijks vinden we voor $\frac{DE}{CE}$:

$$\frac{DE}{CE} = \frac{CE - CD}{CE} = \frac{CE}{CE} - \frac{CD}{CE} = 1 - \frac{CD}{CE}$$

Maar we weten dat $\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{CE}$, dus $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE}$.

Ook geldt $BC = DF$ door de eigenschappen van een parallellogram, dus $\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{CE}$. Dit kunnen we omschrijven naar $\frac{DF}{DE} = \frac{AC}{CE}$. Dit is genoeg om te stellen dat FDE en ACE gelijkvormig zijn (een gelijke hoek, en een gelijke verhouding tussen de zijden aanliggend aan die hoek).

Bewijs.

3. We weten $\angle BCD = \angle DFB$ door de eigenschappen van een parallellogram, wat weer gelijk is aan $\angle ABF$. Ook weten we dat $\angle BAF = \angle DFE$ omdat deze driehoeken gelijkvormig zijn. Dus weten we dat $\angle AFB + \angle BFD + \angle DFE = \angle AFB + \angle ABF + \angle BAF = 180^\circ$. Dus AFE ligt op één lijn.

Bewijs.

4. We weten we BAF en CAE gelijkvormig zijn. Dus $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Dit kunnen we omschrijven naar $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC}$.