

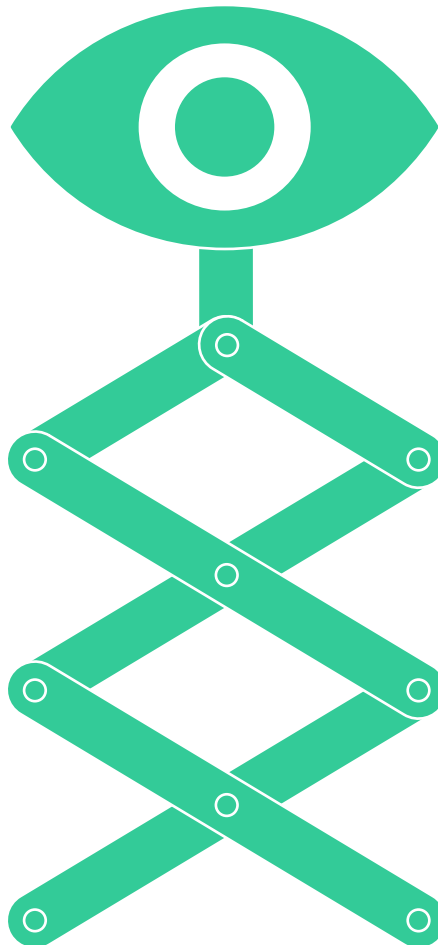


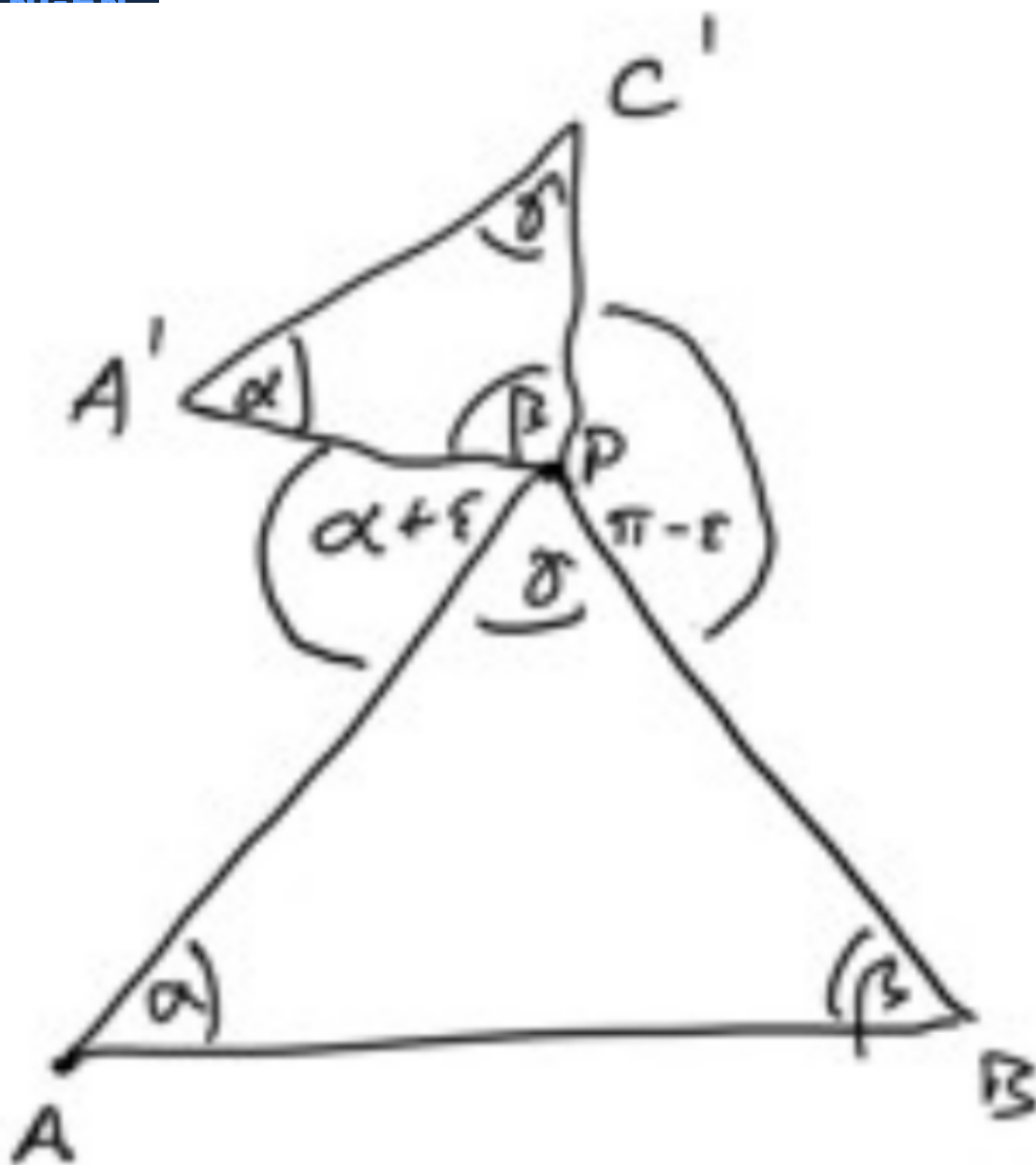
Plagiograaf en Pantograaf

Gelijkvormigheid en transformatie in mechanismen

Rainer Kaenders

Samenvatting We bekijken de meetkunde en werking van de plagiograaf (scheve pantograaf) en de pantograaf – klassieke tekenmechanismen gebaseerd op de theorie van gelijkvormige driehoeken. Vertrekkend vanuit twee gelijkvormige driehoeken met een gemeenschappelijk punt worden via parallelogrammen nieuwe punten geconstrueerd, wat leidt tot de hoofdstelling dat de plagiograaf een getraceerde figuur afbeeldt op een gelijkvormige kopie die met een vaste factor is vergroot en over een vaste hoek is gedraaid. Vervolgens wordt dit principe gekoppeld aan het vierstangenmechanisme, wat uitmondt in de stelling van Tchebychev en Roberts: als twee draaipunten van het uitgebreide mechanisme vast blijven, blijft ook een derde afgeleid punt vast.

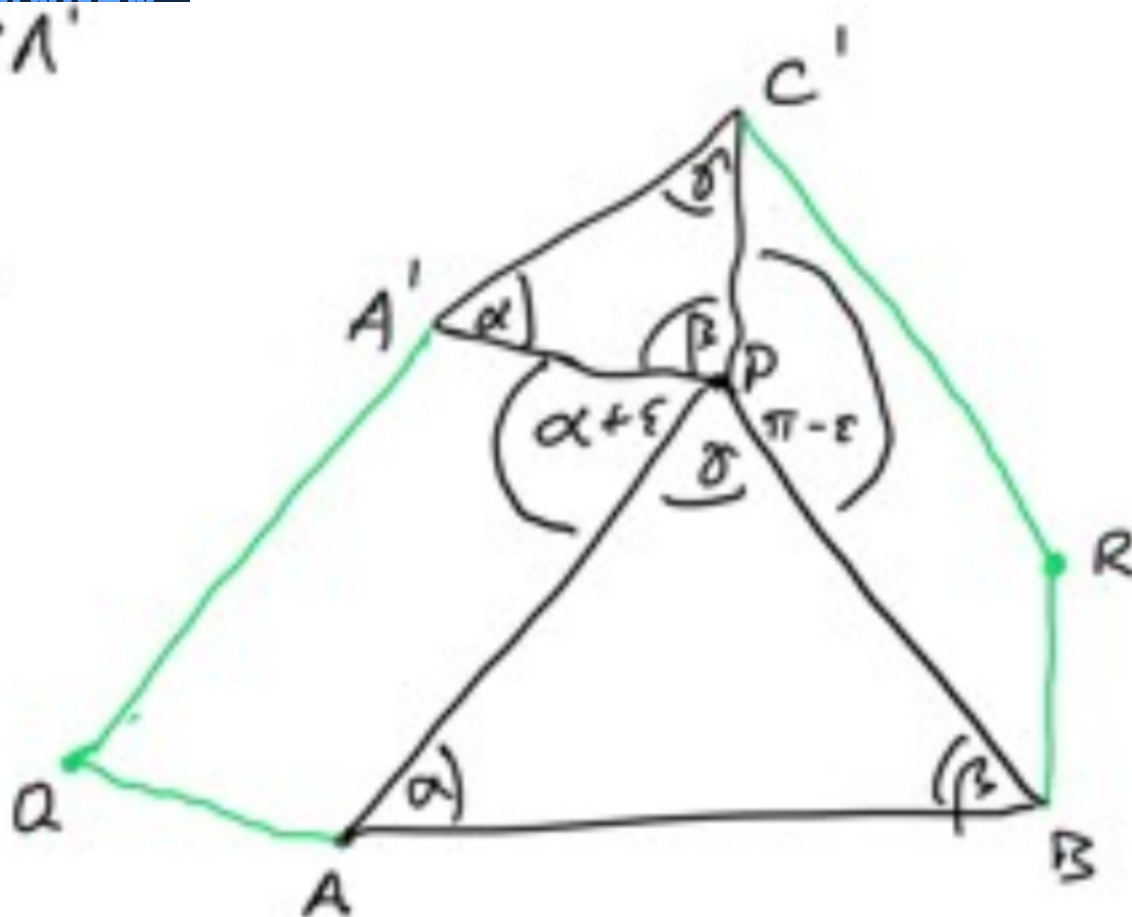




Figuur 1

Stel wij zetten gelijkvormige driehoeken $\triangle ABP$ en $\triangle A'P'C'$ op elkaar zodat ze het punt P gemeen hebben. Beide hebben dezelfde hoeken α, β, γ en wij zeggen dat $\angle A'PA = \alpha + \epsilon$, zodat voor $\epsilon = 0$ het lijnstuk $A'P$ evenwijdig is aan AB .

Aan de andere kant zien we, dat dan $\angle BPC' = \pi - \epsilon$. Nu completeren we APA' en BPC' elk tot een parallellogram, zodat de nieuwe punten Q en R ontstaan.



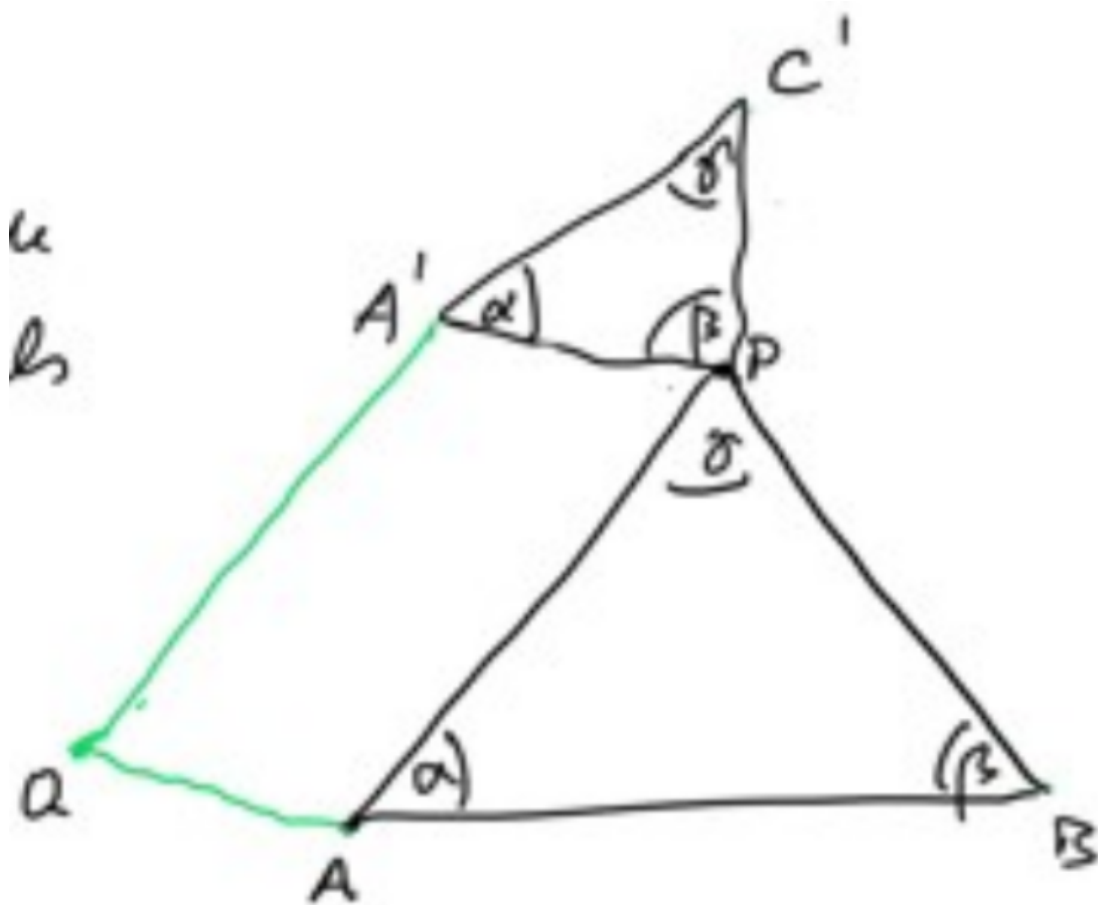
Figuur 2

Opgave

1. Laat zien dat $\triangle QBC'$ en $\triangle R'A'A$ gelijkvormig zijn aan $\triangle ABP$, respectievelijk $\triangle A'P'C'$.
2. Bewijs nu, dat ook de volgende twee drietallen van driehoeken onderling gelijkvormig zijn
 1. $\triangle QC'A', \triangle BQA, \triangle BC'P$
 2. $\triangle RAB, \triangle A'RC', \triangle RAA'$
3. Bewijs dat $\angle BQC' = \alpha$ en $\angle ARA' = \beta$

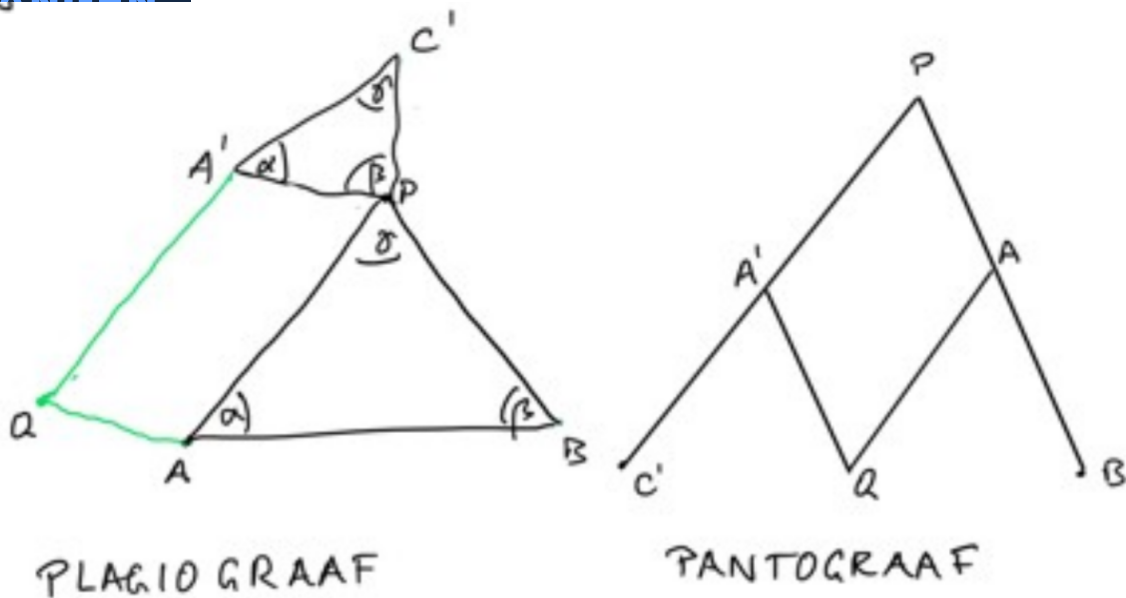
Opdracht

1. Knutsel met het aangeleverde materiaal een constructie zoals in Figuur 3. Fixeer het punt Q en traceer met het punt B een zekere figuur terwijl je met C' een figuur laat tekenen. Wat is je observatie? Geef een bewijs!
2. Fixeer nu B , traceer het figuur met Q en laat C' een figuur tekenen. Probeer ook elk van de andere mogelijkheden om de rollen van vast punt, traceerpunt en tekenpunt aan Q, B, C' toe te kennen.
3. Onderzoek van de speciale gevallen, waar één van de hoeken α, β, γ gelijk aan π is. Maak een tekening van het bijbehorende tekengerei.



Figuur 3

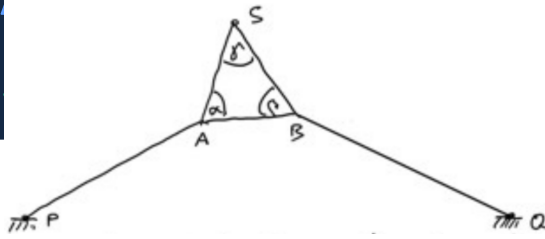
Wij noemen



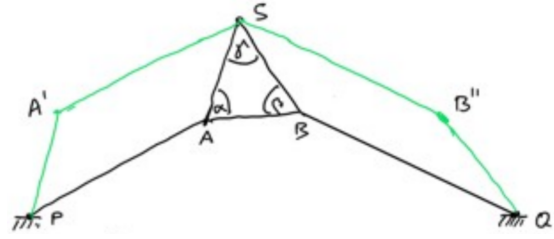
De pantograaf is dus een speciaal geval van de plagiograaf. Hij werd door James L. Sylvester uitgevonden en hij noemde de plagiograaf ook wel de "schuine pantograaf" 1875. Over deze plagiograaf hebben we nu het volgende ingezien:

Stelling. Bij een plagiograaf zoals hierboven, met een vast punt Q , is de driehoek $\triangle QBC'$ gelijkvormig met $\triangle ABP \sim \triangle A'PC'$. Dit heeft tot gevolg dat als we met het punt B een figuur op het vlak traceren, tegelijkertijd het punt C' een gelijkvormige figuur tekent, die met een factor $\frac{|AP|}{|AB|}$ is vergroot en om de hoek α is gedraaid.

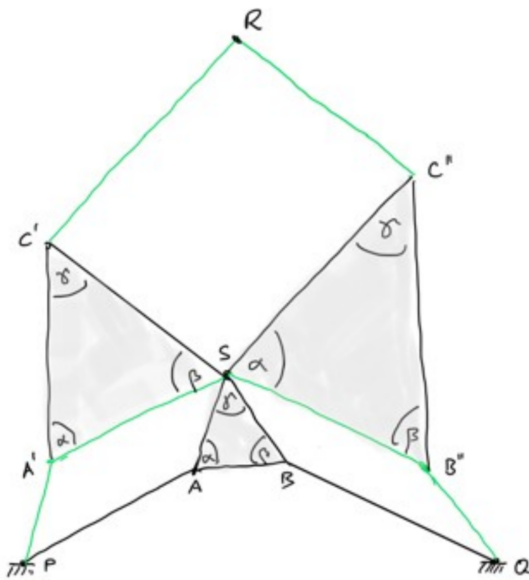
Nu bekijken we het koppelkrommenmechanisme van Figuur 4a



(a) Een vierstangenmechanisme met koppelpunt S



(b) Het vierstangenmechanisme wordt uitgebreid door twee parallellogrammen te tekenen



(c) Deze constructie kunnen we voortzetten met twee gelijkvormige driehoeken

Figuur 4:

Na onze ervaring met de plagiograaf zou je op het idee kunnen komen er parallellogrammen aan vast te plakken zoals in Figuur 4b. Op $A'S$ en SB'' zetten we dan zo een keer twee gelijkvormige kopieën $\triangle A'SC'$ en $\triangle SB''C''$ van onze droekhoek $\triangle ABS$. Nu kunnen we $C'SC''$ met een punt R tot een parallellogram completeren tot Figuur 4c.

Stelling: Tchebychev, Roberts. Als bij de constructie van Figuur 4c P en Q vast blijven, dan blijft ook het punt R vast.

Bewijs. R' zij het eenduidig bepaalde vaste punt, zodat $\triangle PQR' \sim \triangle ABS$. De driehoeken $\triangle ABS$ en $\triangle A'SC'$ vormen met P een pantograaf, die een punt B op een punt C' afbeeldt, waar $\angle BPC' = \alpha$ en $\frac{|BP|}{|PC'|} = \frac{|AB|}{|AS|}$.

en cirkel rond Q met straal $|BQ|$. De pantograaf beeldt in dat deel van de cirkel rond Q met straal $|BQ|$. De pantograaf beeldt nu dat deel van de cirkel rond Q met straal $|BQ|$, waar B kan komen, af op een cirkel rond het punt R' met straal $\frac{|AS|}{|AB|} \cdot |BQ| = |SB''| \cdot |BQ| = |SC''|$.

Maar ook de driehoeken $\triangle ABS$ en $\triangle SB''C''$ vormen met Q een plagiograaf, die het punt A dat op een cirkel rond P met straal $|AP|$ ligt op een cirkel rond R' met straal $|SC'|$ afbeeldt.

Dus moet $R = R'$ wezen en dit punt blijft bij de beweging van het mechanisme vast.

□

Bibliografie

- [1] J. J. Sylvester, 'On the Plagiograph aliter the Skew Pantograph', Nature, nr. 12, p. 168, 1875.