Vierstangenmechanisme: Wiebelen of Draaien (Grashof)

Domas Syaifoel

mei 2026

Een vierstangemechanisme bestaat uit drie stangen en een achterplaat (ook wel “aarde”) genoemd, dit is de vierde stang.

Vierstangenmechanismes worden onderverdeeld in twee types: ofwel één of meer stangen kunnen een volledige rotatie maken, of niet.

Als een volledige rotatie mogelijk is, dan wordt het mechanisme “Grashof” genoemd, naar Franz Grashof, die dit onderscheid beschreef. Een mechanisme dat geen volledige rotaties toelaat (en dus alleen “wiebelt”) wordt niet-Grashof genoemd.

We bewijzen de stelling van Grashof: “een mechanisme is Grashof als de lengte van de kortste staaf plus de lengte van de langste staaf, kleiner is dan of gelijk is aan de som van de lengtes van de andere twee staven”.

Bewijs

Allereerst hebben we de “driehoeksongelijkheid” nodig: voor een driehoek met zijden a, b, c geldt:

$$a \leq b + c$$
$$b \leq c + a$$
$$c \leq a + b$$

Dit zou voor zich moeten spreken: als a de basis van de driehoek is, en de hoogte van de driehoek is nul, dan geldt $a = b + c$. En als we de hoogte van de driehoek groter maken, dan worden b en c langer, dus geldt $a < b + c$.

Vervolgens kunnen we de driehoek draaien om b of c als basis te nemen, en hetzelfde doen om de andere twee ongelijkheden te vinden.

Laten we vervolgens vastleggen voor een vierstangemechanisme met stanglengtes S, P, Q, L:

$$S \leq P \leq Q \leq L$$

Dan zijn er drie verschillende mechanismes mogelijk:

$$SPQL$$
$$SPLQ$$
$$SQPL$$

De reden hiervoor is dat we zo’n mechanisme kunnen draaien en spiegelen zonder dat er iets verandert voor het mechanisme: het mechanisme $PQSL$ bijvoorbeeld is hetzelfde als $SQPL$, en het mechanisme $QLSP$ is hetzelfde $SPQL$.

We checken voor elk mechanisme elk paar van aan elkaarzittende staven (dit zijn vier paren per mechanisme). Als een staaf volledig kan roteren ten opzichte van beide aangrenzende staven, dan kan het volledig roteren.

Per scharnier doen we het volgende:

Kijken we bijvoorbeeld naar scharnier SP, dan moet er in twee situaties aan alle drie de driehoeksongelijkheid worden voldaan: namelijk als S en P in elkaars verlengde liggen (dus een zijde $S+P$), en als S (deels) overlapt met P (dus een zijde $P=S$). Dit geeft ons in totaal zes ongelijkheden, die we allemaal moeten checken.

- $(S+P) \leq Q+L$, geldt altijd want $S+P \leq P+P \leq Q+Q \leq Q+L$
- $Q \leq (S+P)+L$, geldt altijd want $Q \leq L \leq S+P+L$
- $L \leq (S+P)+Q$, geldt niet altijd, onthouden!
- $(P-S) \leq Q+L$, geldt altijd want $P-S \leq P \leq L \leq Q+L$
- $Q \leq (P-S)+L$, geldt altijd want $Q \leq L \leq P-S+L$
- $L \leq (P-S)+Q$, geldt niet altijd (alleen als $L+S \leq P+Q$), onthouden!

Kijken we vervolgens naar scharnier SQ, en doen we hetzelfde.

- $(S+Q) \leq P+L$, geldt altijd want $S+Q \leq P+Q \leq P+L$
- $P \leq (S+Q)+L$, geldt altijd want $P \leq L \leq S+Q+L$
- $L \leq (S+Q)+P$, geldt niet altijd, onthouden!
- $(Q-S) \leq P+L$, geldt altijd want $Q-S \leq Q \leq L \leq P+L$
- $P \leq (Q-S)+L$, geldt altijd want $P \leq L \leq Q-S+L$
- $L \leq (Q-S)+P$, geldt niet altijd (alleen als $L+S \leq P+Q$), onthouden!

Dan scharnier SL:

- $(S+L) \leq P+Q$, geldt niet altijd, onthouden!
- $P \leq (S+L)+Q$, geldt altijd want $P \leq L \leq S+L+Q$
- $Q \leq (S+L)+P$, geldt altijd want $Q \leq L \leq S+L+P$
- $(L-S) \leq P+Q$, geldt niet altijd, onthouden!
- $P \leq (L-S)+Q$, geldt altijd want $P+S \leq L+Q$, zie het eerste geval van scharnier SP.
- $Q \leq (L-S)+P$, geldt altijd want $Q+S \leq L+P$, zie het eerste geval van scharnier SQ.

Zijn we nu pas op de helft? Gelukkig niet, want als we kijken naar scharnier PQ, dan moeten we checken $L \leq (Q-P)+S$, en dat kan niet, want $L+P \geq Q+S$, zie het eerste geval van scharnier SQ.

Op de zelfde manier kan scharnier PL nooit volledig roteren, want dan moeten we hebben dat $(P+L) \leq (S+Q)$, en dat is weer hetzelfde, wat niet kan.

En QP kan nooit volledig roteren, want dan moeten we $(Q+L) \leq S+P$ hebben, maar $Q+L \geq S+P$ volgens het eerste geval van schanier SP.

Dan hebben we dus de volgende mechanismen, een kruisje betekent dat het schanier nooit volledig kan roteren, en een vraagteken dat het afhankelijk is.

```
   Q           L           P
 x---x       x---x       x---x
L|   |P     Q|   |P     L|   |Q
 ?---?       ?---?       ?---?
   S           S           S
```

In elk geval kan dus alleen staaf S een volledige rotatie maken, en dat is afhankelijk van scharnieren SP, SQ, SL.

- SP kan roteren als $L \leq (S+P)+Q$ en $L+S \leq P+Q$.
- SQ kan roteren als $L \leq (S+Q)+P$ en $L+S \leq P+Q$.
- SL kan roteren als $(S+L) \leq P+Q$ en $(L-S) \leq P+Q$.

Dit geldt dus alledrie alleen als $L+S \leq P+Q$, want dan geldt ook $L-S \leq P+Q$.

Ter conclusie, een vierstangemechanisme kan alleen volledige rotaties maken als $L + S \leq P + Q$.